1
LIVRO

1
AULA

Séries de Números Reais

META

Representar funções como somas de séries infinitas.

OBJETIVOS

Calcular somas de infinitos números reais.

PRÉ-REQUISITOS

Seqüências (Aula 02).

1.1 Introdução

Estudaremos nesta aula, uma exemplo especial de seqüência. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência, a seqüência cujo termo geral é a soma dos n primeiros termos da seqüência x_n, é denominada série de números reais (numérica).

O principal objetivo dessa aula, é estudar propriedades e a convergência dessas séries. Veremos que quando uma série convergir, digamos para S então S é a soma de infinitos números reais.

1.2 Séries Numéricas

Definição 1.1. Considere uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

A seqüência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denomina-se série numérica associada a seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Os números $x_n,\ n \geq 1$, são denominados termos da série; x_n é o termo geral da série. Referir-nos-emos a

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

como soma parcial de ordem n da série.

O limite da série, quando existe (finito ou infinito), denomina-se soma da série e é indicada por $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$. Assim

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Se a soma for finita, diremos que a série é convergente. Se a soma for infinita ($+\infty$ ou $-\infty$) ou se o limite não existir, diremos que a série é divergente. Finalmente, dizemos que a série converge absolutamente se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ for convergente.

O símbolo $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ foi indicado para indicar a soma da série. Por um abuso de notação, tal símbolo será utilizado ainda para representar a própria série. Falaremos, então, da série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, entendendo-se que se trata da série cuja soma parcial de ordem n é $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Escreveremos com freqüência $\sum x_n$ para representar a série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Exemplo 1.2.1. Considere a Série Geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$, onde r é razão da série e $a \in \mathbb{R}^*$ é uma constante denominada termo inicial da série. Vamos estudar a convergência desta série em função dos valores de r. Temos que

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n.$$

Se $r = 1$, então é imediato que $S_n = na$. Segue que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge e, portanto $\sum ar^n = \sum a$ diverge. Suponhamos que $r \neq 1$. Multiplicando S_n por r, obtemos

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots + ar^n + ar^{n+1}.$$

Agora $S_n - rS_n = a - ar^{n+1}$ e daí

$$S_n = a\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Assim, $\sum ar^n$ converge se, e somente se, $|r| < 1$ e, neste caso,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \frac{a}{1 - r}.$$

Exemplo 1.2.2. Considere a série $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ e suponha que $x_k = y_k - y_{k+1},\ k \geq 1$. (Uma tal série denomina-se série telescópica).

a) Verifique que $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = y_1 - y_{n+1}$.

b) Conclua que se $\lim_{n \longrightarrow +\infty} y_n = y$, com b real, então a soma da série será finita e igual a $y_1 - y$.

Solução:

a) $\sum_{k=1}^{n} x_k = (y_1 - y_2) + (y_2 - y_3) + \ldots + (y_n - y_{n+1}) = y_1 - y_{n+1}$

b) $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \lim_{n \longrightarrow +\infty} (y_1 - y_{n+1}) = y_1 - y.$ ■

Exemplo 1.2.3. Calcule a soma $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Solução: Note que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Trata-se então de uma série telescópica. Segue do exemplo anterior que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Logo, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, pois $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Proposição 1. Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ suas séries convergentes e $c \in \mathbb{R}$. Temos que

(i) $\sum (x_n + y_n)$ é convergente para $\sum x_n + \sum y_n$;

(ii) $\sum (c \cdot x_n)$ é convergente para $c \cdot \sum x_n$.

Demonstração: A demonstração é trivial: basta aplicar as propriedades de limite da soma e da multiplicação por um escalar. ■

Observamos que, em geral,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x_n \cdot y_n) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} y_n.$$

Passamos ao estudo da natureza de séries, isto é, estamos interessados em critérios que determinam se uma série é convergente ou divergente.

Teorema 1.1. (i) $\sum x_n$ converge se, e somente se,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq m \geq N \Longrightarrow \left| \sum_{i=m}^{n} x_i \right| < \epsilon.$$

(ii) Se $\sum x_n$ converge, então $x_n \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow +\infty$.

(iii) Toda série absolutamente convergente é convergente.

Demonstração: (i) Suponhamos que $\sum x_n$ converge, isto é, a seqüência de termo geral $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ é convergente, digamos que para S. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|S_n - S| < \frac{\epsilon}{2}$. Portanto, se $n \geq m \geq N$, temos

$$\left| \sum_{i=m}^{n} x_i \right| = |S_n - S_m| \leq |S_n - S| + |S - S_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Reciprocamente, um argumento análogo ao da demonstração do Teorema **??** mostra que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada (verifique). Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem subseqüência $(S_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente para o limite S. Mostremos que $S_n \longrightarrow S$. Seja $\epsilon > 0$, temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq m \geq N \Longrightarrow |S_n - S_m| < \epsilon. \tag{1.2.1}$$

Como $S_{n_k} \longrightarrow S$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq N$ e $|S_{n_k} - S| < \frac{\epsilon}{2}$. Daí e de (1.2.1) segue que, se $n \geq N$, então

$$|S_n - S| \leq |S_n - S_{n_k}| + |S_{n_k} - S| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(ii) Segue de (i), tomando $n = m$.

(iii)Observamos que para todo $m, n \in \mathbb{N}$ temos

$$\left| \sum_{i=m}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=m}^{n} |x_i| = \left| \sum_{i=m}^{n} |x_i| \right|.$$

Portanto, por (i), a convergência de $\sum |x_n|$ implica a de $\sum x_n$. ∎

Devemos ressaltar que a recíproca do item (iii) do teorema anterior, não é verdadeira, ou seja, existem séries que são convergentes mas não são absolutamente convergentes, as séries deste tipo são denominadas séries condicionalmente convergente. Veremos um exemplo posteriormente.

Exemplo 1.2.4. Pelo item (ii), a condição $x_n \longrightarrow 0$ é necessária para a convergência da série $\sum x_n$ porém ela não é suficiente. A Série Harmonica $\sum \dfrac{1}{n}$ é o contra exemplo mais famoso. De fato, temos

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= 1 + \frac{1}{2}, \\
S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}, \\
S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Portanto, $S_{2^n} > 1 + n/2$. Daí, segue que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_{2^n} = +\infty$. Concluímos que a série diverge.

Vamos tratar agora de alguns critérios de convergência para séries de termos positivos. Claramente, todos os critérios aqui expostos podem ser adaptados para séries de termos negativos. Com efeito, se $\sum x_n$ é uma série de termos negativos, então $\sum(-x_n)$ é uma série de termos positivos e, além disso, a primeira converge se, e somente se, a segunda converge.

Eventualmente, podemos usar também critérios sobre séries de termos positivos para uma série $\sum x_n$ que tenha termos de sinais variáveis, tais séries são denominadas séries alternadas. Ora, se ao aplicarmos algum destes critérios para a série $\sum |x_n|$ concluirmos que ela é convergente, então, como toda série absolutamente convergente é convergente, concluiremos que $\sum x_n$ converge. Por outro lado, se o critério nada disser, ou mesmo se ele nos informar que $\sum |x_n|$ é divergente, em geral, nada poderemos afirmar sobre a convergência da série $\sum x_n$. Neste caso, temos o seguinte critério de convergência para Séries Alternadas:

Teorema 1.2. (Critério de convergência para séries alternadas) Seja a série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x_n$, onde $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (Séries Alternadas). Se a seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for decrescente e se $\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = 0$, então a série alternada $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x_n$ será convergente.

Não faremos a demonstração deste Critério, pois é baseada em propriedades dos Intervalos Encaixantes não vistos neste curso. O leitor interessado pode encontra tal demonstração no Livro "Um Curso de Cálculo, Vol. 4"de Hamilton Luiz Guidorizzi.

Antes de seguir para o estudo dos critérios de convergência para séries de termos positivos, observamos também o seguinte fato, já mencionado no caso de seqüência. Os primeiros termos de uma série nada influem na sua natureza. De fato, a série $\sum x_n$ converge se, e somente se, a série $\sum x_{n+2008}$ converge. De maneira geral, fixando $p \in \mathbb{N}$ a série $\sum x_n$ é convergente se, e somente se, a série $\sum x_{n+p}$ é convergente. Desta forma, todos os critérios que determinam a natureza de uma série através de algumas propriedades verificada por todos os seus termos continuam válidos se a tal propriedade é verificada à partir de algum termo (por exemplo, 2008). Por outro lado, não podemos desprezar nenhum termo de uma série convergente quando estamos interessados em determinar o valor de sua soma infinita.

Proposição 2. Uma série de termos positivos é convergente se, e somente se, a seqüência de suas somas parciais é limitada superiormente.

Demonstração: Por definição $\sum x_n$ é convergente se, e somente se, a seqüências de suas somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Como $x_n \geq 0$, temos imediatamente que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente. Logo, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente se, e somente se, ela é limitada superiormente. ■

Teorema 1.3. (Critério da Integral) Consideremos a série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ e suponhamos que exista $p \in \mathbb{N}$ e uma função $f : [p, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, decrescente e positiva tal que $f(k) = x_k$ para todo $k \geq p$. Nestas condições, tem-se:

(i) $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(x)dx$ convergente $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ convergente;

(ii) $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(x)dx$ divergente $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ divergente.

Demonstração: Para $n > p$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{p} x_k + \sum_{k=p+1}^{n} x_k$. Como p está fixo, segue dessa relação que a série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ será convergente (ou divergente) se, e somente se, $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{+\infty} x_k$ for convergente (ou divergente).

(i) Temos que (Veja Figura 1.1)

$$\sum_{k=p+1}^{n} x_k \leq \int_p^n f(x)dx \leq \int_p^{+\infty} f(x)dx.$$

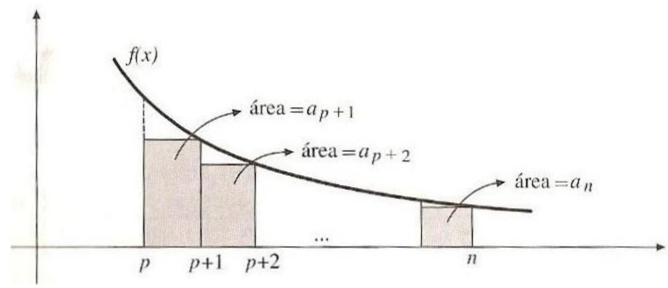

Figura 1.1: Soma Inferior

Segue que a seqüência $\sum_{k=p+1}^{n} x_k$ é crescente e limitada superiormente por $\int_p^{+\infty} f(x)dx$. Logo a série $\sum_{k=p+1}^{+\infty} x_k$ é convergente e, portanto, $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ também é convergente.

(ii) A demonstração deste item é análoga a do item (i), por isso deixamos para o leitor. ■

Exemplo 1.2.5. Seja $\alpha > 0$, com $\alpha \neq 1$, um real dado. Estude a série $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha}$ com relação a convergência ou divergência.

Solução: Se $\alpha = 1$ estudaremos a convergência da série $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \ln k}$ através do Critério da Integral, utilizando a função

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}, \; x \geq 2.$$

Tal função é positiva, contínua e decrescente em $[2, +\infty[$ como se verifica facilmente. Temos

$$\int_2^t \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln(\ln x)]_2^t = \ln(\ln t) - \ln(\ln 2).$$

Como $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} \ln(\ln t)dt = +\infty$, resulta $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = +\infty$. Pelo critério da integral a série é divergente.

Suponhamos agora que $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$. Vamos aplicar, novamente, o critério da integral com a função $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$. Está função é claramente positiva, contínua e decrescente no intervalo $[2, +\infty[$. Temos

$$\int_2^t \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}dx = \left[\frac{1}{(1-\alpha)(\ln x)^{\alpha-1}}\right]_2^t = \ln(\ln t) - \ln(\ln 2)$$

e, portanto,

$$\int_2^t \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}dx = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(\ln t)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{\alpha-1}}\right].$$

Para

$$\alpha > 1 \Longrightarrow \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{1}{(\ln t)^{\alpha-1}} = 0$$

e, para

$$0 < \alpha < 1 \Longrightarrow \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{1}{(\ln t)^{\alpha-1}} = +\infty$$

. Pelo critério da integral, a série é convergente para $\alpha > 1$ e divergente para $0 < \alpha < 1$. ■

Teorema 1.4. (Critério da Comparação) Sejam as séries $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ e $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} y_k$. Suponhamos que exista $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq p$, $0 \leq x_k \leq y_k$. Nestas condições, tem-se:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} y_k$ convergente $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_k$ convergente;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_k$ divergente $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} y_k$ divergente.

Demonstração: (i) Basta provamos que $\displaystyle\sum_{k=p}^{\infty} x_k$ é convergente. Como, para todo $k \geq p$, $y_k \geq 0$, a seqüência

$$t_n = \sum_{n=0}^{n} y_k,\ n \geq p,$$

é crescente. Daí e pelo fato da série $\sum_{k=p}^{\infty} y_k$ ser convergente resulta, para todo $n \geq p$,

$$\sum_{k=p}^{n} y_k \leq \sum_{k=p}^{+\infty} y_k.$$

Como, para todo $k \geq p,\ 0 \leq x_k \leq y_k$, resulta que a seqüência

$$s_n = \sum_{k=p}^{n} x_k,\ n \geq p, \tag{1.2.2}$$

é crescente e, para todo $n \geq p$,

$$\sum_{k=p}^{n} x_k \leq \sum_{k=p}^{+\infty} y_k.$$

Segue que a seqüência 1.2.2 é convergente, ou seja, a série $\sum_{k=p}^{+\infty} x_k$ é convergente.

(ii) Fica a cargo do leitor. ■

Exemplo 1.2.6. Vamos estudar a natureza da série $\sum \frac{1}{n^p}$ segundo os valores de p. É claro que se $p \leq 0$, então ela diverge pois neste caso $\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n \neq 0$. Suponhamos $0 \leq p \leq 1$. Temos $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, por comparação com a série harmonica, concluímos que a série diverge. Finalmente, consideramos o caso $p > 1$. Mostraremos que a série converge através do Critério da Integral, utilizando a função $f(x) = \frac{1}{x^p},\ p > 1$. Tal função é positiva, contínua e decrescente em $[1, +\infty[$ como se verifica facilmente. Temos

$$\int_1^t \frac{1}{x^p} dx = \left[\frac{1}{(1-p)x^{p-1}}\right]_1^t = \frac{1}{(1-p)t^{p-1}} - \frac{1}{1-p}.$$

Como $\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{(1-p)t^{p-1}} dt = 0$, resulta $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}$. Pelo critério da integral a série é convergente.

Exemplo 1.2.7. A série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \; sen \; \frac{1}{k}$ é convergente ou divergente? Justifique.

Solução: Para todo $k \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1}{k} \; sen \; \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}.$$

Como $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ é convergente (basta usar o exemplo 1.2.6 com $p = 2$), segue do Teorema da Comparação que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \; sen \; \frac{1}{k}$ é convergente.

Exemplo 1.2.8. A série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^2 + 2k + 1}$ é convergente ou divergente? Justifique.

Solução:

$$\frac{k}{k^2 + 2k + 1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}}.$$

Para todo $k \geq 1$,

$$1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2} \leq 4$$

e, portanto, para todo $k \geq 1$,

$$\frac{1}{1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}} \geq \frac{1}{4}.$$

Segue que, para todo $k \geq 1$,

$$\frac{k}{k^2 + 2k + 1} \geq \frac{1}{4k}.$$

Como $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k}$ é divergente resulta que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^2 + 2k + 1}$$

diverge.

Teorema 1.5. (Critério do Limite) Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ duas séries de termos positivos. Suponhamos que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{x_n}{y_n} = L.$$

Então:

a) se $L > 0$, L real, ou ambas são convergentes ou ambas são divergentes;

b) se $L = +\infty$ e se $\sum y_n$ for divergente, $\sum x_n$ também será divergente;

c) se $L = 0$ e se $\sum y_n$ for convergente, $\sum x_n$ também será convergente.

Demonstração:

a) De $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{x_k}{y_k} = L,\ L > 0$ e real, segue que tomando $\epsilon = \frac{L}{2}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Longrightarrow L - \frac{L}{2} < \frac{x_n}{y_n} < L + \frac{L}{2}$$

ou seja

$$n > N \Longrightarrow \frac{L}{2} y_n < x_n < \frac{3L}{2} y_n.$$

Segue do critério da comparação que ambas são convergentes ou ambas são divergentes.

b) De $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{x_k}{y_k} = +\infty$, segue que tomando-se $\epsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Longrightarrow \frac{x_n}{y_n} > 1$$

e, portanto,

$$n > N \Longrightarrow x_n > y_n.$$

Segue do critério da comparação que se $\sum y_n$ for divergente, então $\sum x_n$ também será.

c) De $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{x_k}{y_k} = 0$, segue que tomando-se $\epsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Longrightarrow \frac{x_n}{y_n} < 1$$

e, portanto,

$$n > N \Longrightarrow x_n < y_n.$$

Segue do critério da comparação que se $\sum y_n$ for convergente, então $\sum x_n$ também será. ■

Exemplo 1.2.9. A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$ é convergente ou divergente? Justifique.

Solução: A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{-n}{2}}$ é convergente, pois trata-se de uma série geométrica de razão $r = e^{\frac{-1}{2}}$. Façamos

$$x_n = ne^{-n} \quad \text{e} \quad y_n = e^{\frac{-n}{2}}.$$

Temos

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n}{e^{\frac{n}{2}}} = 0.$$

Pelo critério do limite, a série dada é convergente.

Observação 1.1. O sucesso na utilização do critério do limite está exatamente na escolha adequada da série $\sum y_n$ de comparação. Em muitos casos, as séries harmonicas ou as séries geométricas desempenham muito bem este papel.

Exemplo 1.2.10. A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\ln k}$ é convergente ou divergente? Justifique.

Solução: Vamos tomar como série de comparação a série harmonica $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\ln k}$. Temos

$$x_k = \frac{1}{\ln k} \quad \text{e} \quad y_k = \frac{1}{k}.$$

Então,

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{x_k}{y_k} = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{k}{\ln k} = +\infty.$$

Pelo Critério do Limite a série dada é divergente.

Observe, no exemplo anterior, que se tivéssemos tomado como séria de comparação a harmonica convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, teríamos, também,

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{x_k}{y_k} = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{k^2}{\ln k} = +\infty.$$

Entretanto, neste caso, o critério do limite não nos fornecerá informações alguma sobre a convergência ou divergência da série dada.

Os próximos dois critérios de convergências valem também para séries com termos negativos.

Teorema 1.6. (Teste da Razão, ou de d'Alembert) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência não nula. Suponhamos que $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ exista, finito ou infinito. Seja

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = L.$$

Nesta condições, tem-se:

(i) Se $L < 1$, a série $\sum x_n$ será convergente;

(ii) Se $L > 1$ ou $L = +\infty$, a série $\sum x_n$ será divergente;

(iii) Se $L = 1$, o critério nada revela.

Demonstração: (i) A idéia é comparar a série dada com uma série geométrica convergente. Como $L < 1$, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < r < 1$. Segue da definição de limite, que existe

$N \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| < r$ para todo $n \geq N$. Temos então:

$$\begin{aligned}
|x_{N+1}| &< r|x_N|;\\
|x_{N+2}| &< r|x_{N+1}| < r^2|x_N|;\\
|x_{N+3}| &< r|x_{N+2}| < r^3|x_N|;\\
&\vdots
\end{aligned}$$

De maneira geral, $|x_n| < r^{n-N}|x_N|$, para todo $n \geq N$. Tomando $y_n = r^{n-N}|x_N|$ (para todo $n \in \mathbb{N}$) temos que $|x_n| < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\sum y_n$ é uma Série Geométrica de razão $r \in (0,1)$, ela é convergente. O critério da comparação nos garante que $\sum x_n$ converge absolutamente e, portanto, é convergente .

(ii) Como $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1$ ou $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = +\infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N$ então

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1.$$

Isso significa que $|x_{n+1}| > |x_n|$ quando $n \geq N$, e assim

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n \neq 0.$$

Portanto, $\sum x_n$ diverge pelo teste da divergência. ■

A parte (iii) do Teste da Razão diz que, se $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 1$, o Teste da Razão não dá nenhuma informação. Por exemplo, para a série convergente $\sum \dfrac{1}{n^2}$, temos

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} \longrightarrow 1 \;\text{ quando }\; n \longrightarrow \infty$$

enquanto para a série divergente $\sum \dfrac{1}{n}$, obtemos

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow 1 \;\text{ quando }\; n \longrightarrow \infty.$$

Portanto, se $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 1$ a série $\sum x_n$ pode convergir ou divergir. Neste caso, o Teste da Razão falha e devemos usar algum outro teste.

Exemplo 1.2.11. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ é convergente, pois

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.2.12. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n}$ é convergente. De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right|\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^3}\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3} < 1.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.2.13. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{n!}$ é divergente. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!}\cdot\frac{n!}{n^n}\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1.
\end{aligned}$$

O teste a seguir é conveniente para ser aplicado quando as potências de n ocorrem. Sua prova é similar à do Teste da Razão e fica por conta do leitor.

Teorema 1.7. (Teste da Raiz)

(i) Se $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = L < 1$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente;

(ii) Se $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = L > 1$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ é divergente;

(iii) Se $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$, então o Teste da Raiz não é conclusivo.

O Teste da Raiz é mais eficiente que o da Razão. Mais precisamente, em todos os casos nos quais o Teste da Razão permite concluir (seja por convergência ou por divergência) o Teste da Raiz também será concludente. Entretanto, o Teste da Razão é, em geral, mais fácil de ser aplicado.

Exemplo 1.2.14. Teste a convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

Solução: Considere

$$x_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

e

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3} < 1$$

Então, a série dada converge pelo Teste da Raiz.

1.3 Resumo

Considere uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

A seqüência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denomina-se **série numérica** associada a seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. O termo geral da $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

é denominado soma parcial de ordem n da série.

O limite da série, quando existe (finito ou infinito), denomina-se soma da série e é indicada por $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. Assim

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Se a soma for finita, diremos que a série é convergente. Se a soma for infinita ($+\infty$ ou $-\infty$) ou se o limite não existir, diremos que a série é divergente.

Nosso objetivo com essa aula era que você (aluno) aprendesse a testar a convergência de séries. Para tanto, foi apresentado os principais critérios de convergências de séries. (Ver os Critérios e os Testes de convergências)

Os conceitos e os critérios de convergência de séries serão essenciais no estudo de séries de potências que faremos na próxima aula.

1.4 Atividades

01. (a) Qual a diferença entre uma seqüência e uma série?

(b) O que é uma série convergente? O que é uma série divergente?

02. Seja $x_n = \dfrac{n}{n+1}$.

(a) Determine se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente.

(b) Determine se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente.

03. Determine se a série é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} + \cdots$ (b) $3 + 2 + \dfrac{4}{3} + \dfrac{8}{9} + \cdots$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2-1}\right)$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n+2^n}{6^n}\right)$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ (h) $\displaystyle\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}$

04. Mostre que a série dada é convergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^{-n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$.

05. Estude a série dada com relação a convergência ou divergência.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (b) $\displaystyle(-1)^n\frac{n}{\ln n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2+3^n}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+3^n}{2^n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-10)^n}{n!}$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}n!$

06. (a) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ converge para todo x.

(b) Deduza que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{x^n}{n!}=0$.

1.5 Comentário das Atividades

Se você (aluno) conseguiu resolver as Atividades 01. e 02., então entendeu a grande diferença de seqüências e séries de números reais. Entender essa diferença é muito importante.

Na Atividade 03. você utilizou (ou utilizará) as propriedades de limites (vistas no Cálculo I) para testar a convergência das séries dadas.

Na Atividade 04. é dada duas séries alternadas e é pedido que você (aluno) teste a convergência das mesmas. Nesta atividade podemos usar o critério de convergência para séries alternadas ou lançarmos mão da convergência absoluta.

A Atividade 05. você utilizou (ou deve utilizar) os critérios de convergência vistos nesta Aula, para estudar a convergência das séries dadas.

O Teste da Razão deverá ser usado na resolução da Atividade 06.. Nesta atividade estamos interessados em encontrar o conjunto dos x tais que a série numérica converge.

Conseguiu resolver todas as Atividade? Sabe usar os critérios de convergência (Critério da Razão dentre outros) dados? Ótimo!!! Você esta com todos os requisitos necessários para compreensão da próxima aula.

Lembrem-se sempre que há tutores a distância e presenciais para ajudá-los na resolução dessas atividades. Estudar em grupo com seus colegas, pode tornar a resolução dessas atividades mais fácil e interessante.

1.6 Referências

- GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo** (Vol. 1 e 4). Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.
- STEWART, J., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- THOMAS, G. B., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Addison Wesley, 2002.